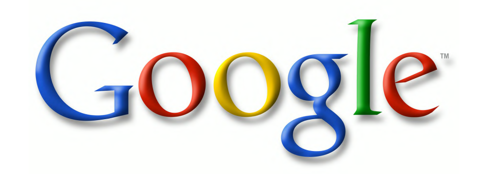
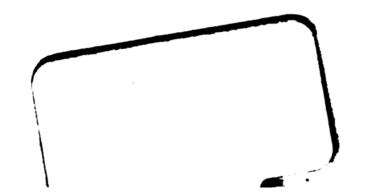




DER CONSTANTEN
WAHRSCHEINLICHE FEHLER.

NACHTRAG ZUR DRITTEN AUFLAGE

DER

GRUNDZÜGE DER WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG

VON

G. HAGEN.

BERLIN.
VERLAG VON ERNST & KORN
(GROPIUS'SCHE BUCH- UND KUNSTHANDLUNG).
1884.

Zur Beurtheilung und Bezeichnung der Schärfe sowohl einzelner Messungen, als der daraus hergeleiteten Resultate, hatte man früher gewisse Gewichte eingeführt, die zwar nach bestimmten Regeln berechnet wurden, wobei jedoch manche ziemlich unsichre Schätzungen nicht umgangen werden konnten. Weit mehr, als diese Gewichte eignet sich zum Maafs der Sicherheit der wahrscheinliche Fehler, der nicht nur ganz methodisch ohne irgend eine willkührliche Voraussetzung oder Schätzung hergeleitet wird, sondern der aufserdem auch sehr einfach erkennen läfst, ob die für jeden Fall erforderliche Sicherheit wirklich erreicht ist.

Von absoluter Sicherheit mufs man unter allen Verhältnissen absehn, da solche bei Wahrnehmungen und Erfahrungen niemals zu erreichen ist. Das zufällige Zusammentreffen ungünstiger Umstände vermag, aller Vorsicht unerachtet, einzelne Beobachtungs-Fehler so zu vergröfsern, dafs solche sogar jede Grenze übersteigen können. Die Wahrscheinlichkeit dieses Zusammentreffens bleibt aber so geringe, dafs, wenn es auch immer möglich ist, es nach menschlichen Begriffen doch niemals eintritt. Das Vorkommen solcher grofsen Fehler veranlafst der Zufall eben so, wie das Erscheinen von Bildflächen beim Aufwerfen von Münzen. Es ist keineswegs unmöglich, dafs beim Niederfallen von hundert Münzen auf allen die Bildflächen nach oben sich kehren sollten, aber die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist nur Eins, dividirt durch eine Zahl, die mit ein und dreifsig Ziffern geschrieben wird. Um diesen geringen Grad von Wahrscheinlichkeit zu versinnlichen, mag daran erinnert werden, dafs, wenn von 1000 Millionen Menschen, also etwa von allen Bewohnern der Erde, ein Jeder die hundert Münzen aufwirft und zwar ohne Unterbrechung Tag und Nacht hindurch, und mit solcher Schnelligkeit, dafs von Secunde zu Secunde diese Würfe sich folgen, den-

noch durchschnittlich erst in der Periode von 43 Millionen mal Millionen Jahren es Einem glücken wird, diesen seltenen Wurf auszuführen, der die sämmtlichen Bildflächen zeigt. Obwohl dieses Ereignifs unbedingt möglich ist, so darf man dennoch nicht erwarten, es eintreten zu sehn, wie oft man den Versuch auch wiederholen mag.

Hiermit steht in naher Beziehung die Aeufserung von Gaufs*), dafs das von ihm aufgestellte Gesetz über das Vorkommen der Fehler von verschiedener Gröfse nicht der Erfahrung entspricht, weil bei sorgfältigen Messungen sehr grofse Fehler niemals vorkommen. Dieses geschieht indessen wohl theils deshalb nicht, weil die Wahrscheinlichkeit dafür zu geringe ist, als dafs solche Fehler selbst in den ausgedehntesten Messungen zu erwarten wären. Dazu kommt wahrscheinlich noch ein andrer Grund. Wenn es nämlich auch im Allgemeinen durchaus unstatthaft ist, eine Messung, die bei ihrer Ausführung kein Bedenken erregte, deshalb auszuschliefsen, weil sie von den übrigen abweicht, so wird man dennoch diejenigen verwerfen und ganz unbeachtet lassen, die augenscheinlich falsch sind.

Eine bestimmte Grenze, über welche hinaus die Fehler nicht anwachsen, läfst sich nicht bezeichnen, und es bleibt nur übrig, den jedesmaligen Verhältnissen entsprechend den passenden Grad der Wahrscheinlichkeit festzustellen, mit der man erwarten darf, dafs die Fehler nicht zu grofs werden. In den meisten Fällen genügt dazu wohl die Wahrscheinlichkeit 0,999, welche besagt, dafs bei tausendmaliger Wiederholung ähnlicher Messungen nur einmal ein Fehler die noch zulässige Grenze überschreitet. In vielen wissenschaftlichen Untersuchungen, so wie auch bei Beurtheilung andrer Verhältnisse pflegt man eine viel geringere Wahrscheinlichkeit schon als volle Sicherheit anzusehn.

Hat man unter Berücksichtigung der betreffenden Verhältnisse für einen vorliegenden Fall den Grad der nothwendigen Sicherheit oder die erforderliche Wahrscheinlichkeit eines günstigen Erfolges festgestellt, so läfst sich aus dem wahrscheinlichen Fehler der Messungen und Beobachtungen oder der Resultate derselben entnehmen, ob diese Sicherheit wirklich erreicht ist,

*) Theoria motus corporum coelestium. Lib. II Sect. 3.

oder ob noch weitere und schärfere Untersuchungen erforderlich sind. Der einfache wahrscheinliche Fehler, von dem man nur weifs, dafs er eben so oft überschritten, wie nicht erreicht wird, genügt freilich nicht zur sichern Beantwortung dieser Frage. Man kennt indessen die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ueberschreiten sowohl eines bestimmten Theils, als jedes Vielfachen des wahrscheinlichen Fehlers zu besorgen ist und aus den hierüber aufgestellten Tabellen kann man unmittelbar entnehmen, ob das Resultat die nöthige Sicherheit bietet. Dabei mufs aber daran erinnert werden, dafs solche Tabellen sowohl die positiven, wie die negativen Fehler berücksichtigen. Sobald es sich aber um die Sicherheit von Constructionen handelt, sind die negativen Fehler unschädlich, da sie nur eine entbehrliche Sicherheit bezeichnen. Die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen nachtheiliger Fehler ist daher nur halb so grofs, als die Tabellen angeben.

In § 30 und 31 der Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung*) ist gezeigt worden, wie die wahrscheinlichen Fehler sowohl der einzelnen Messungen und Beobachtungen, als auch der nach der Methode der kleinsten Quadrate daraus berechneten Constanten gefunden werden. Die letzteren können indessen zuweilen mit Rücksicht auf die bei dieser Methode nothwendige Form der Ausdrücke nicht unmittelbar eingeführt werden, man ist vielmehr oft gezwungen, sie in andrer Art, also beispielsweise als Nenner, oder in der Form $\frac{1}{z}$ in Rechnung zu stellen. Alsdann läfst sich der wahrscheinliche Fehler von $\frac{1}{z}$ wohl finden, es bleibt aber noch die Aufgabe, hieraus den wahrscheinlichen Fehler von z zu berechnen. Andern Falls setzt sich oft die gesuchte Constante aus zwei oder mehreren Constanten zusammen, deren wahrscheinliche Fehler man kennt. Hierher gehört die wichtige Frage nach dem wahrscheinlichen Fehler eines Products, wenn man diejenigen der

*) Die Paragraphen, auf welche hier und im Folgenden, meist ohne weitere Bezeichnung, hingewiesen wird, beziehn sich auf die dritte Auflage meiner kleinen Schrift „Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung“. Verlag von Ernst & Korn, Berlin 1882.

Factoren desselben berechnet hat. Namentlich bei Vermessungen kommt es darauf an, den wahrscheinlichen Fehler einer Fläche, im einfachsten Fall eines Rechtecks zu bestimmen, dessen Breite und Länge nebst den wahrscheinlichen Fehlern derselben bekannt sind. Diese Aufgabe ist zwar in § 32 bereits behandelt, doch ist die daselbst mitgetheilte Lösung nicht unbedenklich, woher im Folgenden hierauf nochmals zurückgekommen wird.

Bei der vielfachen Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung bin ich noch einigen andern Fragen dieser Art begegnet, deren Beantwortung ein näheres Eingehen in die betreffenden Beziehungen erfordert. Die dafür gefundenen Ausdrücke sollen im Folgenden mitgetheilt und entwickelt werden.

Um mich von der Richtigkeit derselben zu überzeugen, habe ich in gleicher Weise, wie der Physiker die Resultate seiner Untersuchungen durch das Experiment prüft, dasselbe Verfahren auch hier anzuwenden versucht. Um beispielsweise von der Richtigkeit des Ausdrucks mich zu überzeugen, den ich für den wahrscheinlichen Fehler des Products rs gefunden hatte, fingirte ich zwei verschiedene Reihen von Messungen, die eine des Factors r, die andre für s und berechnete daraus die wahrscheinlichsten Werthe, so wie die wahrscheinlichen Fehler dieser beiden Factoren. Sodann multiplicirte ich die einander gegenüber stehenden einzelnen Werthe von r und s. Hierdurch bildete sich noch eine dritte Reihe, welche die Producte rs enthielt. Indem ich auch aus dieser den wahrscheinlichsten Werth von rs und den wahrscheinlichen Fehler desselben berechnete, musste letzterer mit demjenigen übereinstimmen, der nach dem entwickelten Ausdruck aus den wahrscheinlichen Fehlern der Factoren r und s sich ergab.

Bei diesen Proben darf man eine vollständige Uebereinstimmung beider Resultate nicht erwarten. Der wahrscheinliche Fehler läſst sich zwar nach den jedesmal vorliegenden Messungen scharf berechnen, seiner Natur nach bleibt er aber stets nicht ganz sicher und darf immer nur als annähernd richtig angesehn werden. Im vorliegenden Fall kommt noch der Umstand hinzu, dass die Einzelwerthe von r und s in der Art mit einander verbunden wurden, wie sie zufällig in dieselben Zeilen trafen. Bei

jeder andern Verbindung wären andre Producte dargestellt und das Schlufsresultat hätte sich etwas geändert.

Nichts desto weniger entsprachen diese Versuche dennoch vollständig den Erwartungen und liefsen, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird, unbedingt erkennen, ob der entwickelte Ausdruck als sicher angesehn werden durfte. Dabei waren aber zwei Punkte noch sorgfältig beachtet, ohne deren Berücksichtigung solche Resultate wahrscheinlich nicht eingetreten wären. Zunächst mufste jedesmal eine gröfsere Anzahl von Messungen zum Grunde gelegt werden, um mit genügender Sicherheit die wahrscheinlichen Fehler bezeichnen zu können. Aus diesem Grunde wurden meist dreifsig, äufsersten Falls aber wenigstens vier und zwanzig Messungen fingirt.

Demnächst war es dringend geboten, dafs die eingeführten Fehler, eben so wie bei wirklichen Messungen der Zufall dieses fügt, dem allgemeinen Gesetz über das Vorkommen der Fehler von verschiedener Gröfse annähernd sich anschlossen. Diese Bedingung liefs sich dadurch leicht berücksichtigen, dafs auch hier die Bildung der Fehler vollständig dem Zufall überlassen wurde, indem ich nach bestimmten Regeln aus der Anzahl der Augen, die mehrere aufgeworfene Würfel zeigten, die letzten drei Ziffern der fingirten Beobachtungen bildete. Hierdurch erreichte ich noch den wesentlichen Vortheil, dafs jedes willkührliche Eingreifen, das immer einigen Verdacht erweckt hätte, die Uebereinstimmung sei künstlich herbeigeführt, vollständig vermieden wurde. Alle Würfe ohne Ausnahme wurden benutzt, selbst wenn mehrere einander folgende sehr grofse Abweichungen vom mittleren Werthe in gleichem Sinne zeigten.

Die im Folgenden mitgetheilten Reihen sind in sehr verschiedenen Zeiten und nach verschiedenen Regeln gebildet. In der letzten Zeit benutzte ich drei Würfel und die Anzahl der Augen, die sie beim Aufwerfen zeigten, ergab die zwei vorletzten Ziffern des Werthes jeder fingirten Messung. Zeigten die Würfel etwa 6, 4 und 5, so waren diese Ziffern 15, bei 1, 4 und 3 dagen 08. Indem dabei aber die Differenzen gegen den mittleren Werth überaus geringe blieben, so fügte ich, um diese zu vergröfsern, noch eine dritte, nämlich die letzte Ziffer hinzu, welche der geringsten Anzahl der Augen eines der drei Würfel

gleich war. Kam es aber darauf an, Messungen darzustellen, die mit verschiedener Schärfe ausgeführt sein sollten, so wurden in derjenigen Reihe, welche die weniger genauen Beobachtungen enthielt, jene drei letzten Ziffern noch mit einem Factor multiplicirt, der meist 3 oder 4, in einem Fall aber gleich 20 war.

Die Ausdrücke für die hier gesuchten wahrscheinlichen Fehler der Constanten lassen sich aus dem Satz herleiten, der den wahrscheinlichen Fehler der Summe einer Anzahl gleichartiger Messungen bezeichnet. Dieser wichtige Satz ist zwar § 33 bereits angegeben, doch ist er daselbst aus dem Ausdruck für den wahrscheinlichen Fehler eines Products dargestellt, der hier noch nicht als bekannt vorausgesetzt werden durfte. Es kommt daher darauf an, ihn in andrer Weise zu begründen.

In § 30 wurde gezeigt, dafs wenn es sich nur um eine einzige Constante handelt, die wiederholentlich gemessen wurde, und deren wahrscheinlichster Werth das arithmetische Mittel dieser einzelnen Messungen ist, der wahrscheinliche Fehler dieses Werthes sich gleich stellt dem wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Messungen dividirt durch die Quadratwurzel der Anzahl derselben. Bezeichnet man wieder die Anzahl der Messungen mit m, den wahrscheinlichen Fehler derselben mit ω und den wahrscheinlichen Fehler von r mit $\omega(r)$, so hat man hiernach

$$\omega(r) = \frac{1}{\sqrt{m}}\,\omega$$

Vorliegend sucht man den wahrscheinlichen Fehler der Summe einer Anzahl m einzelner Messungen, deren wahrscheinlicher Fehler gleich σ sein mag. Man denke die Resultate dieser Messungen lineär dargestellt, und wie etwa eben so viele Kettenschläge in eine Linie hinter einander aufgetragen, so würde der wahrscheinliche Fehler der ganzen gemessenen Linie s gleich der Summe der einzelnen wahrscheinlichen Fehler, also $m\sigma$ sein, wenn keine Ausgleichung der positiven und negativen Fehler statt fände. Eine solche ist aber wahrscheinlich und dadurch vermindert sich nach dem vorstehenden

Satz der wahrscheinliche Fehler im Verhältnifs von $\sqrt{m}$ zu 1, er wird also

$$\omega(s) = \frac{1}{\sqrt{m}} m\sigma$$

$$\omega(s) = \sqrt{m} \, . \, \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A.$$

Der wahrscheinliche Fehler der Summe einer Anzahl gleichartiger Messungen ist sonach gleich dem wahrscheinlichen Fehler dieser einzelnen Messungen multiplicirt mit der Quadratwurzel aus der Anzahl derselben.

Es mag hier noch kurz wiederholt werden, wie man den wahrscheinlichsten Werth einer mehrfach gemessenen Gröfse und den wahrscheinlichen Fehler derselben findet. Die einzelnen Messungen mögen $p', p'', p''' \ldots$ sein, alsdann ist der wahrscheinlichste Werth gleich dem arithmetischen Mittel dieser p, oder

$$p = \frac{[p]}{m}$$

wobei die Parenthese [ ] die Summe der sämmtlichen $p' \ldots$ und m wieder die Anzahl der Messungen bezeichnet (§ 19). Wenn aber die Differenzen der einzelnen Messungen gegen das arithmetische Mittel derselben mit x bezeichnet werden, so ist der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Messungen, also der wahrscheinliche Beobachtungsfehler nach § 30

$$\omega = 0{,}67449 \sqrt{\frac{[xx]}{m-1}}$$

und der wahrscheinliche Fehler des arithmetischen Mittels

$$\omega(p) = \frac{1}{\sqrt{m}} \omega$$

Zunächst mag die Aufgabe gelöst werden, den wahrscheinlichen Fehler der S u m m e z w e i e r G r ö f s e n zu finden, deren wahrscheinliche Fehler man kennt, die aber mit v e r s c h i e d e n e r S c h ä r f e gemessen sind.

Diese Gröfsen seien r und s und ihre wahrscheinlichen Fehler nach der bereits eingeführten Bezeichnung $\omega(r)$ und $\omega(s)$. Nennt man den wahrscheinlichen Fehler der Einheit, worin r

gemessen ist, ϱ und σ denjenigen der Einheit von s setzt, so hat man nach dem Satz A

$$\omega(r) = \sqrt{r} \cdot \varrho$$

und
$$\omega(s) = \sqrt{s} \cdot \sigma$$

Um den wahrscheinlichen Fehler der Summe beider, also um $\omega(r+s)$ zu finden, darf man denselben nicht unmittelbar wie für gleichartige Messungen berechnen, weil ϱ und σ verschieden sind, man mufs vielmehr die eine Gröfse, also etwa s, in derjenigen Einheit messen, für welche bei ihr der Fehler demjenigen der andern, also gleich ϱ wird. Dieses geschieht, sobald man s mit $\frac{\sigma}{\varrho}$ multiplicirt. Man hat alsdann

$$\omega(s) = \sqrt{s} \cdot \frac{\sigma}{\varrho}\, \varrho \,.$$

Dieses ist nach Satz A der wahrscheinliche Fehler von

$$s \cdot \frac{\sigma^2}{\varrho^2}$$

und nunmehr ergiebt sich der wahrscheinliche Fehler der Summe

$$\omega(r+s) = \sqrt{\left(r + s\,\frac{\sigma^2}{\varrho^2}\right)}\,\varrho$$
$$= \sqrt{(r\varrho^2 + s\sigma^2)}$$
$$\omega(r+s) = \sqrt{\omega(r)^2 + \omega(s)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad B$$

Es mufs darauf aufmerksam gemacht werden, dafs die Exponenten ^{2} sich nicht auf die Gröfsen r und s, sondern auf die wahrscheinlichen Fehler derselben beziehn.

Dieser Satz besagt also, dafs der wahrscheinliche Fehler der Summe zweier mit verschiedener Schärfe gemefsner Gröfsen gleich ist der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der wahrscheinlichen Fehler beider Gröfsen.

Dieses Gesetz stellt sich in einer Figur sehr einfach dar. Giebt man nämlich den beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks solche Längen, dafs sie den wahrscheinlichen Fehlern von r und s entsprechen, so wird in Folge der Ausgleichung der Fehler die Hypotenuse den wahrscheinlichen Fehler der Summe beider darstellen.

Bisher wurde vorausgesetzt, die beiden Gröfsen r und s seien mit verschiedener Schärfe gemessen, oder die wahrschein-

lichen Fehler der Maafs-Einheiten seien nicht dieselben. Der Satz behält indessen seine Gültigkeit, wenn dieses auch nicht der Fall ist. Er ist alsdann sogar eine unmittelbare Folge des Satzes *A.* Man hat nämlich

$$\begin{aligned} \omega(r+s) &= \sqrt{r+s}\cdot\varrho \\ &= \sqrt{r\cdot\varrho^2+s\cdot\varrho^2} \\ &= \sqrt{\omega(r)^2+\omega(s)^2} \end{aligned}$$

Wenn zu jenen beiden Gliedern r und s noch ein drittes t hinzukommt, das wieder in andrer Schärfe gemessen wurde, so findet man den wahrscheinlichen Fehler der Summe, indem man die beiden ersten Glieder als bereits vereinigt ansieht und sie als erstes Glied betrachtet. Man hat alsdann

$$\begin{aligned} \omega(r+s+t) &= \omega[(r+s)+t] \\ &= \sqrt{\omega(r+s)^2+\omega(t)^2} \end{aligned}$$

und wenn für das erste Glied unter dem Wurzelzeichen der oben gefundene Werth eingeführt wird, folgt

$$\omega(r+s+t) = \sqrt{\omega(r)^2+\omega(s)^2+\omega(t)^2}$$

In derselben Art verändert sich der Ausdruck, wenn noch mehrere Gröfsen hinzukommen sollten.

Eine Probe unter Zugrunde-Legung zweier fingirten Messungs-Reihen, die wie oben beschrieben, zusammengestellt waren, bei denen aber der wahrscheinliche Fehler der Maafs-Einheit der einen viermal so grofs, als für die der andern war, bestätigte die Gültigkeit der Formel. Es sind sowohl für r, wie für s vier und zwanzig Werthe gesucht, welche die zweite und die dritte Spalte der nachstehenden Tabelle enthält und welche die Resultate der einzelnen Messungen vorstellen. Die vierte Spalte giebt dagegen die Summen der in denselben Zeilen stehenden Werthe von r und s an. Hierdurch bildet sich eine dritte Reihe von Messungen, aus der man den gesuchten wahrscheinlichen Fehler der Summe direct berechnen kann.

	r	s	$r+s$
1	47,102	72,202	119,304
2	47,112	72,454	119,566
3	47,101	72,251	119,352
4	47,082	72,352	119,434
5	47,051	72,201	119,252
6	47,132	72,606	119,738
7	47,165	72,202	119,367
8	47,081	72,201	119,282
9	47,031	72,403	119,434
10	47,123	72,201	119,324
11	47,133	72,352	119,485
12	47,081	72,251	119,332
13	47,121	72,301	119,422
14	47,143	72,151	119,294
15	47,081	72,151	119,232
16	47,143	72,351	119,494
17	47,101	72,453	119,554
18	47,072	72,402	119,474
19	47,091	72,453	119,544
20	47,101	72,353	119,454
21	47,061	72,202	119,263
22	47,164	72,665	119,829
23	47,051	72,504	119,555
24	47,052	72,403	119,455
Mittel Werthe	47,099	72,336	119,435

Die Fehler der einzelnen Werthe von r, die den Beobachtungs-Fehlern entsprechen, ergeben sich, indem diese Werthe mit dem arithmetischen Mittel aus denselben, also mit 47,099 verglichen werden. Die Summe der Quadrate dieser Fehler ist

$$[xx] = 0{,}03089.$$

Hieraus findet man den wahrscheinlichen Beobachtungs-Fehler

$$\omega = 0{,}02472$$

und den wahrscheinlichen Fehler des wahrscheinlichsten Werthes von r

$$\omega(r) = 0{,}005045$$

Eben so ergiebt sich für s das arithmetische Mittel gleich 72,336 und die Summe der Fehlerquadrate

$$[xx] = 0{,}45770$$

Hiernach ist $\omega = 0{,}09515$

und $\omega(s) = 0{,}01942$

Man hat nunmehr zur Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers der Summe $r + s$

$$\omega(r)^2 + \omega(s)^2 = 0{,}0004027$$

folglich die Wurzel hieraus oder der gesuchte wahrscheinliche Fehler

$$\omega(r + s) = 0{,}02007$$

Betrachtet man dagegen die Summen der neben einander stehenden Werthe von r und s als durch Messung gegeben, so ist der wahrscheinlichste Werth derselben 119,435 und die Summe der Fehlerquadrate

$$[xx] = 0{,}50010$$

Hieraus findet man

$$\omega = 0{,}09946$$

und den wahrscheinlichen Fehler von $r + s$

$$\omega(r + s) = 0{,}02030$$

Dieses Resultat stimmt mit dem vorstehenden, das nach der Formel B berechnet war, sehr nahe überein. Das Experiment bestätigt also die Gültigkeit des gefundenen Ausdrucks.

Es mag noch eine zweite Probe hinzugefügt werden, aus der sich sehr auffallend entnehmen läfst, dafs man zu einem unrichtigen Resultat gelangt, wenn man, einer nahe liegenden Voraussetzung folgend, den wahrscheinlichen Fehler der Summe zweier Gröfsen darstellen wollte.

Es sei eine Linie s von etwa 1235 Ruthen Länge mit grofser Schärfe gemessen und nach dreifsigmaliger Wiederholung der wahrscheinlichste Werth dieser Länge und der wahrscheinliche Fehler derselben ermittelt. Man verlängert diese Linie um etwa 421 Ruthen also um r. Diese Messung, die wieder eben so oft ausgeführt wird, erfolgt aber in weit geringerer Schärfe, so dafs der wahrscheinliche Fehler für die Längen-Einheit etwa

zwanzigmal gröfser wird, als bei der ersten Messung. Es fragt sich, wie grofs der wahrscheinliche Fehler der ganzen Linie $r + s$ sei.

	r	s	$r + s$
1	421,82	1235,155	1656,97
2	421,61	1235,141	1656,75
3	422,43	1235,144	1657,57
4	421,81	1235,071	1656,88
5	422,84	1235,101	1657,94
6	422,21	1235,091	1657,30
7	421,01	1235,104	1656,11
8	422,42	1235,113	1657,53
9	422,01	1235,125	1657,14
10	422,23	1235,103	1657,33
11	421,82	1235,081	1656,90
12	422,01	1235,061	1657,07
13	421,81	1235,124	1656,93
14	421,61	1235,121	1656,73
15	421,81	1235,072	1656,88
16	422,42	1235,122	1657,54
17	422,41	1235,132	1657,54
18	422,03	1235,114	1657,14
19	422,02	1235,124	1657,14
20	423,03	1235,063	1658,09
21	421,82	1235,145	1656,96
22	422,43	1235,142	1657,57
23	422,84	1235,152	1657,99
24	422,01	1235,073	1657,08
25	421,91	1235,115	1657,03
26	422,01	1235,112	1657,12
27	422,61	1235,091	1657,70
28	422,02	1235,143	1657,16
29	422,84	1235,152	1657,99
30	422,61	1235,093	1657,70
Mittel Werthe	422,15	1235,113	1657,26

Führt man die Rechnung in gleicher Weise wie vorstehend aus, so ergiebt sich unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung für die zweite Spalte

$$r = 422{,}15$$
$$[xx] = 5{,}751$$
$$\omega = 0{,}3004$$

und
$$\omega(r) = 0{,}05484$$

Aus der dritten Spalte dagegen

$$s = 1235{,}113$$
$$[xx] = 0{,}002312$$
$$\omega = 0{,}006023$$
$$\omega(s) = 0{,}00110$$

Hiernach ist

$$\omega(r)^2 + \omega(s)^2 = 0{,}0030195$$

also der gesuchte wahrscheinliche Fehler der ganzen Linie

$$\omega(r + s) = 0{,}05495$$

Aus den in der vierten Spalte angegebenen Summen von r und s findet man dagegen

$$r + s = 1657{,}26$$
$$[xx] = 5{,}791$$
$$\omega = 0{,}3014$$

und
$$\omega(r + s) = 0{,}05503$$

also wieder nahe übereinstimmend mit dem Werthe, den die Formel ergab.

Indem die Beobachtungs-Fehler zu einer bedeutenden Gröfse anwachsen können, so dürfte man vielleicht vermuthen, die vorliegende Aufgabe lasse sich auch in der Art lösen, dafs die mit so verschiedener Schärfe ausgeführten Messungen der beiden Theile der Linie nur als durch zufällige Fehler entstellt angesehn und nicht getrennt werden dürften. Dafs diese Ansicht nicht statthaft ist, ergiebt sich aus dem letzten Zahlen-Beispiel.

Die wahrscheinlichen Fehler von ϱ und σ der Längen-Einheiten von r und s sind nämlich

$$\varrho = \frac{\omega(r)}{\sqrt{r}}$$
$$\sigma = \frac{\omega(s)}{\sqrt{s}}$$

also der mittlere wahrscheinliche Fehler der Längen-Einheit für die ganze Linie

$$\omega = \frac{r \cdot \varrho + s \cdot \sigma}{r + s}$$

$$\omega = \frac{\omega(r)\sqrt{r} + \omega(s)\sqrt{s}}{r + s}$$

und der wahrscheinliche Fehler in der Messung von $r + s$

$$\omega(r + s) = \sqrt{(r + s)} \cdot \omega$$

Führt man aus dem letzten Beobachtungen die Zahlenwerthe ein, so findet man

$$\omega = 0{,}000\,7032$$

und
$$\omega(r + s) = 0{,}02863$$

Dieser wahrscheinliche Fehler der ganzen Linie würde also nur halb so grofs sein, als die Probe-Rechnung ihn ergab und was besonders auffallend ist, auch nur etwa halb so grofs, als der wahrscheinliche Fehler des ersten sehr kurzen Theils der Linie. Letzteres ist an sich unmöglich, denn wenn es auch denkbar bleibt, dafs bei weiterer Fortsetzung einer Messung die neu hinzukommenden Fehler die früher begangenen zum Theil aufheben, so ist ein solcher Zufall durchaus nicht wahrscheinlich. Schon aus dem Satz A ergiebt sich, dafs in diesem Fall der wahrscheinliche Fehler sich nur vergröfsern kann. Die hier gefundene Verminderung desselben erklärt sich aber sehr einfach dadurch, dafs bei solcher Verbindung durch das Hinzutreten des zweiten Theils der Linie die Summe der Fehler sich nur wenig vergröfsert, wohl aber die Anzahl derselben bedeutend anwächst. Da letztere aber im Nenner auftritt, so mufste das Resultat einen geringeren Werth annehmen.

Es mag nunmehr zur Beantwortung der besonders wichtigen Frage übergegangen werden, wie grofs der wahrscheinliche Fehler eines Productes ist, wenn man diejenigen der Factoren kennt. Ich habe diese Frage zwar bereits in den Grundzügen (§ 33) behandelt, auch einen Ausdruck für den wahrscheinlichen Fehler gegeben, doch ist die Herleitung des-

selben nicht unbedenklich, auch ist er, wie ich später bemerkt habe, nur unter einer gewissen Voraussetzung richtig, während er in einem andern Fall und zwar in einem solchen, der sich häufig wiederholt, ungültig ist und zu falschen Resultaten führt. Es ist mir nicht bekannt, wer diesen Satz zuerst aufgestellt und in der von mir wiedergegebenen Art hergeleitet hat.*)

Zunächst werde ein Product untersucht, das nur aus zwei Factoren besteht. Dasselbe bildet alsdann den Flächen-Inhalt eines Rechtecks, dessen Seiten r und s sein mögen. Der wahrscheinliche Fehler der Seite r erstreckt sich längs der Seite s und bildet, wenn man ihn in oder an das Rechteck einzeichnet, ein schmales Rechteck, dessen Fläche $s \, . \, \omega(r)$ ist. In gleicher Weise zieht sich der wahrscheinliche Fehler von s längs der Seite r hin und bildet ein zweites schmales Rechteck $r \, . \, \omega(s)$. Denkt man die wahrscheinlichen Fehler als negativ eingetragen, so würde bei Summirung beider Rechtecke das kleine Rechteck $\omega(r) \, . \, \omega(s)$ zweimal in Rechnung gestellt werden und müfste daher noch in Abzug kommen. Die wahrscheinlichen Fehler können indessen eben so wohl wie negativ, auch positiv sein, und in diesem Falle würde man dasselbe kleine Rechteck der Summe jener Beiden hinzufügen müssen. Die wahrscheinlichste Annahme bleibt also, dafs der wahrscheinliche Fehler der Fläche rs sich aus den beiden erwähnten Rechtecken zusammensetzt. Derselbe würde dieser Summe gleich sein, wenn bei der Verbindung beider Rechtecke keine Ausgleichung der Fehler einträte. Eine solche ist aber wahrscheinlich, wenn die Seiten r und s wirklich gemessen sind und es kommt sonach darauf an, unter Berücksichti-

*) Bei Bearbeitung der zweiten Auflage der Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung wünschte ich eine Lösung dieser Aufgabe darin aufzunehmen und fragte daher meinen Freund und frühern Studien-Genossen Argelander, ob eine solche ihm bekannt. Derselbe erwiederte, ihm sei einst diejenige mitgetheilt worden, die er beifügte und die ich nahe wörtlich aufgenommen habe. Ein eignes Urtheil darüber sprach er nicht aus. Als ich jedoch bei Vorbereitung der dritten Auflage seinen Brief wieder zur Hand nahm, schien es mir, dafs Argelander schon selbst einige Zweifel dagegen gehegt hätte. Sein inzwischen erfolgter Tod machte jede weitere Verständigung unmöglich.

gung dieser Ausgleichung den wahrscheinlichen Fehler der Summe beider Glieder zu finden.

Indem hier wieder die Aufgabe vorliegt, die Verminderung des wahrscheinlichen Fehlers zu bestimmen, wenn die beiden Glieder, aus denen er besteht, mit einander verbunden werden, so wiederholt sich nur dieselbe Frage, die bei Feststellung des Satzes B bereits gestellt war. Der wahrscheinliche Fehler der Maafs-Einheit für r sei gleich ϱ und für s gleich σ. Man hat alsdann die wahrscheinlichen Fehler von r und von s

$$\omega(r) = \sqrt{r} \cdot \varrho$$

und

$$\omega(s) = \sqrt{s} \cdot \sigma$$

Die beiden zu vereinigenden Glieder sind

$$s \cdot \omega(r) = s \sqrt{r} \cdot \varrho$$

und

$$r \cdot \omega(s) = r \sqrt{s} \cdot \sigma$$

Um das letzte Glied in derselben Einheit zu messen, für welche der wahrscheinliche Fehler eben so grofs, wie in dem ersten, also gleich ϱ ist, führe man den Factor $\frac{\varrho}{\varrho}$ ein.

Man hat alsdann

$$r \cdot \omega(s) = r \cdot \sqrt{s} \cdot \frac{\sigma}{\varrho} \cdot \varrho$$

Nach Satz A sind die zu diesen wahrscheinlichen Fehlern gehörigen Grössen

$$s^2 r \text{ und } r^2 s \frac{\sigma^2}{\varrho^2}$$

also die Summe derselben gleich

$$\frac{s^2 r \varrho^2 + r^2 s \sigma^2}{\varrho^2}$$

und der gesuchte wahrscheinliche Fehler dieser Summe oder des Productes rs ist nach demselben Satz

$$\omega(rs) = \sqrt{s^2 \cdot \omega(r)^2 + r^2 \cdot \omega(s) + \omega(s)^2} \; . \quad . \quad . \quad C$$

Hiernach verringert sich bei Ausgleichung der Fehler der wahrscheinliche Fehler wieder in demselben Verhältnifs, wie die Summe beider Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks zur Hypotenuse.

Besteht das Product aus drei besonders gemefsnen Factoren r, s und t, so findet man den wahrscheinlichen Fehler desselben,

indem man in den vorstehenden Ausdruck das Product rs statt des frühern ersten Factors r und den hinzugekommenen Factor t statt s einführt. Man hat alsdann

$$\omega(rst) = \sqrt{t^2 \cdot \omega(rs)^2 + r^2s^2 \cdot \omega(t)^2}$$

$\omega(rs)$ ist aber bereits bekannt und der dafür gefundene Werth ergiebt schliefslich

$$\omega(rst) = \sqrt{t^2s^2 \cdot \omega(r)^2 + t^2r^2 \cdot \omega(s)^2 + r^2s^2 \cdot \omega(t)^2}$$

Das Product der drei Factoren stellt den körperlichen Inhalt eines rechtwinkligen oder geraden Parallelepipeds dar, dessen Länge, Breite und Höhe r, s und t sind. In gleicher Weise wie beim Rechteck unter der Voraussetzung, dafs keine Ausgleichung der Fehler eintritt, der wahrscheinliche Fehler der Fläche gleich ist der Summe jener beiden schmalen Rechtecke, so ist augenscheinlich auch hier der wahrscheinliche Fehler des Raum-Inhaltes gleich demjenigen der Summe dreier dünner Scheiben, die sich an die Seiten anlehnen, deren Raum-Inhalt also ist

$$ts \cdot \omega(r) + tr \cdot \omega(s) + rs \cdot \omega(t)$$

In ähnlicher Weise ändert sich der Ausdruck, sobald noch mehrere Factoren hinzutreten. Bei n Factoren ist die Anzahl der Glieder unter dem Wurzelzeichen gleich n und jedes derselben besteht aus dem Product der Qradrate von $n - 1$ dieser Factoren multiplicirt mit dem Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers desjenigen Factors, der unter jenen sich nicht befindet.

Zunächst mag die Gültigkeit des gefundenen Ausdrucks für den Fall geprüft werden, dafs nur zwei Factoren vorkommen. In nachstehender Tabelle enthalten die mit r und s überschriebenen Spalten die durch Würfeln dargestellten Beobachtungen, in der letzten Spalte stehn dagegen die Producte der in denselben Zeilen vorstehenden r und s.

	r	s	rs
1	532,3	27,42	14598
2	531,1	27,66	14691
3	529,1	27,64	14622
4	529,1	27,46	14528
5	524,1	27,88	14612
6	532,1	26,62	14164
7	531,1	27,24	14468
8	530,3	26,62	14116
9	532,2	26,82	14276
10	534,2	26,82	14328
11	530,1	27,88	14781
12	529,1	27,88	14750
13	530,2	25,62	13583
14	533,2	26,62	14194
15	531,2	27,26	14481
16	531,2	26,82	14250
17	527,1	28,08	14801
18	529,1	26,62	14083
19	531,2	25,82	13718
20	533,3	26,62	14198
21	532,2	27,88	14839
22	532,1	27,46	14612
23	529,2	26,64	14096
24	531,2	26,02	13823
25	528,1	26,82	14165
26	530,1	25,62	13583
27	537,5	27,04	14534
28	532,2	27,24	14498
29	531,3	27,66	14696
30	527,1	27,04	14253
Mittel	530,74	27,027	14344,7

Aus der mit r überschriebenen Spalte ergiebt sich der wahrscheinlichste Werth des ersten Factors

$$r = 530,74$$

Man findet dadurch die Summe der Fehlerquadrate

$$[xx] = 176{,}27$$

den Beobachtungsfehler

$$\omega = 1{,}663$$

und den wahrscheinlichen Fehler des Factors r

$$\omega(r) = 0{,}3036$$

Die nächste Spalte führt zu den Resultaten

$$s = 27{,}027$$
$$[xx] = 13{,}457$$
$$\omega = 0{,}4595$$

und $$\omega(s) = 0{,}08389$$

Hiernach ist

$$r^2 \,.\, \omega(s)^2 = 1982{,}3$$
$$s^2 \,.\, \omega(r)^2 = 67{,}3$$

und die Quadrat-Wurzel aus der Summe beider, oder der gesuchte wahrscheinliche Fehler

$$\omega(rs) = 45{,}27$$

Aus der letzten Spalte der vorstehenden Tabelle ergiebt aber

$$rs = 14344{,}7$$
$$[xx] = 3700300$$
$$\omega = 240{,}93$$

und $$\omega(rs) = 43{,}99$$

also nahe übereinstimmend mit dem vorstehenden Resultat.

Bei der grofsen Wichtigkeit dieses Satzes mag derselbe noch für den Fall geprüft werden, dafs das Product, dessen wahrscheinlichen Fehler man sucht, drei Factoren, nämlich r, s und t enthält, deren wahrscheinliche Fehler man kennt.

	r	s	t	rst
1	25,33	17,71	25,44	11410
2	24,43	18,22	25,04	11143
3	25,63	18,44	25,64	12117
4	26,59	17,82	24,84	11768
5	25,36	17,41	25,04	11046
6	23,83	18,12	24,22	10458

	r	s	t	rst
7	25,96	18,43	25,86	12371
8	25,99	18,75	26,50	12915
9	25,33	18,54	25,04	11757
10	26,62	18,02	25,22	12098
11	25,96	18,01	24,42	11416
12	23,83	18,02	25,44	10922
13	24,76	18,34	24,62	11179
14	25,39	18,43	25,29	11836
15	26,29	17,81	25,42	11904
16	27,25	18,21	25,02	12417
17	24,76	18,21	24,24	10930
18	26,59	18,23	25,06	12148
19	26,32	18,02	24,22	11490
20	25,99	18,32	25,02	11922
21	25,33	18,01	25,24	11513
22	25,96	18,21	25,44	12035
23	27,35	18,64	24,64	12560
24	25,33	18,64	25,44	12011
25	23,86	18,44	25,86	11379
26	25,06	18,31	25,02	11482
27	23,23	18,32	24,82	10561
28	26,59	18,75	24,64	12003
29	25,39	18,53	25,46	11981
30	24,73	17,91	24,82	10993
Mittel	25,501	18,227	25,099	11658,8

Aus der mit r überschriebenen Spalte ergiebt sich unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$r = 25{,}501$$
$$[xx] = 30{,}342$$
$$\omega = 0{,}690$$
$$\omega(r) = 0{,}126$$

Für s hat man

$$s = 18{,}227$$
$$[xx] = 2{,}892$$

$$\omega = 0{,}2130$$
$$\omega(s) = 0{,}0389$$

Für t endlich

$$t = 25{,}099$$
$$[xx] = 7{,}734$$
$$\omega = 0{,}348$$
$$\omega(t) = 0{,}0636$$

Man findet hiernach

$$\begin{aligned} s^2t^2 \,.\, \omega(r)^2 &= 3320{,}6 \\ r^2t^2 \,.\, \omega(s)^2 &= 819{,}5 \\ r^2s^2 \,.\, \omega(t)^2 &= 873{,}8 \\ \hline \text{Summe } & 5013{,}9 \end{aligned}$$

und hieraus

$$\omega(rst) = 70{,}81$$

Dagegen findet man aus den in der letzten Spalte enthaltenen Producten rst

$$rst = 11659$$
$$[xx] = 10126000$$
$$\omega = 398{,}56$$

und $$\omega(rst) = 72{,}77$$

Dieses letzte Resultat stimmt mit dem ersten bis auf $2\frac{3}{4}$ Procent überein. Man ersieht aber aus den sehr verschiedenen Werthen von ω, dafs die drei fingirten Beobachtungsreihen unter Voraussetzung von eben so verschiedener Schärfe der Messung zusammengestellt sind.

Endlich mag mit Rücksicht auf das Folgende noch eine Proberechnung mitgetheilt werden, die sich auf den Fall bezieht, dafs beide Factoren des Products gleich grofs sind. Es handelt sich also um das Quadrat einer Gröfse, die zweimal in gleicher Weise, also mit gleicher Schärfe, gemessen wurde. Dies ergiebt sich aus der geringen Verschiedenheit der Beobachtungs-Fehler ω.

	r	s	rs	r^2	s^2
1	42,184	42,081	1775,2	1779,5	1770,8
2	42,070	42,112	1771,6	1769,9	1773,4
3	42,061	42,102	1770,9	1769,1	1772,6
4	42,069	42,132	1772,5	1769,8	1775,1
5	42,102	42,101	1772,5	1772,6	1772,5
6	42,090	42,062	1770,4	1771,6	1769,5
7	42,152	42,133	1776,0	1776,8	1775,2
8	42,130	42,123	1774,6	1774,9	1774,4
9	42,089	42,111	1772,5	1771,5	1773,4
10	42,112	42,092	1772,9	1774,0	1771,7
11	42,120	42,102	1773,3	1774,1	1772,6
12	42,099	42,041	1769,9	1772,3	1767,4
13	42,069	42,112	1771,6	1769,8	1773,5
14	42,101	42,081	1771,7	1772,5	1770,8
15	42,079	42,092	1771,2	1770,7	1771,7
16	42,089	42,091	1771,6	1771,5	1771,7
17	42,132	42,102	1773,8	1775,1	1772,6
18	42,122	42,122	1774,3	1774,3	1774,3
19	42,059	42,061	1769,0	1769,0	1769,1
20	42,131	42,121	1774,6	1775,0	1774,2
21	42,079	42,142	1773,3	1770,7	1775,9
22	42,069	42,051	1769,0	1769,8	1768,3
23	42,102	42,164	1775,2	1772,6	1777,8
24	42,101	42,091	1772,1	1772,5	1771,6
25	42,089	42,122	1772,9	1771,5	1774,3
26	42,121	42,081	1772,5	1774,2	1770,8
27	42,081	42,143	1773,4	1770,8	1776,0
28	42,080	42,112	1772,1	1770,8	1773,5
29	42,163	42,061	1773,4	1777,7	1769,1
30	42,109	42,112	1773,3	1773,2	1773,5
Mittel	42,102	42,102	1772,6	1772,6	1772,6

Man hat für den Factor r

$$r = 42{,}102$$
$$[xx] = 0{,}02715$$

$$\omega = 0{,}02064$$
$$\omega(r) = 0{,}00377$$

und für den Factor s

$$s = 42{,}102$$
$$[xx] = 0{,}02410$$
$$\omega = 0{,}0194$$
$$\omega(s) = 0{,}00355$$

Indem beide Factoren einander gleich sind, verwandelt sich die Gleichung C in nachstehende

$$\omega(rs) = r\sqrt{\omega(r)^2 + \omega(s)^2}$$

Aus vorstehenden Werthen findet man

$$\omega(r)^2 = 0{,}000014197$$
$$\omega(s)^2 = 0{,}000012603$$
$$\text{Summe} = 0{,}00002680$$

daher $\omega(rs) = 0{,}2180$

Vernachlässigt man die geringe Differenz zwischen $\omega(r)$ und $\omega(s)$ und führt den mittleren Werth aus beiden, nämlich 0,00366 ein, so folgt

$$\omega(rs) = r\,.\,\omega(r)\,.\,\sqrt{2}$$
$$= 0{,}218$$

Die rs überschriebene Spalte der vorstehenden Tabelle, welche die Producte der in denselben Zeilen angegebenen Werthe von r und s enthält, ergiebt dagegen

$$rs = 1772{,}6$$
$$[xx] = 87{,}59$$
$$\omega = 1{,}1722$$

und $\omega(rs) = 0{,}2140$

also nahe übereinstimmend mit den Resultaten jener Rechnungen.

Ich versuchte nunmehr, aus eben diesen Beobachtungen und zwar unter Zugrundelegung der vorstehend gefundenen Gleichung

$$\omega(r)^2 = \sqrt{2}\,.\,r\,.\,\omega(r)$$

den wahrscheinlichen Fehler von r^2 darzustellen. Derselbe ist 0,2243 also nahe übereinstimmend mit demjenigen des Productes rs.

Wenn ich dagegen die einzelnen beobachteten Werthe von r zum Quadrat erhob, wie die mit r^2 überschriebene Spalte die-

selben angiebt, so war der mittlere Werth von r^2 zwar wieder eben so grofs, wie der von rs, die übrigen daraus gezogenen Resultate stellten sich aber wesentlich anders dar. Ich fand nämlich

$$[xx] = 193{,}04$$
$$\omega = 1{,}740$$

und
$$\omega(r^2) = 0{,}3177$$

also $\omega(r^2)$ viel gröfser als $\omega(rs)$.

Sehr nahe kam ich zu demselben Resultat, indem ich aus dem Factor s und aus dem wahrscheinlichen Fehler desselben den wahrscheinlichen Fehler von s^2 berechnete. Nach jener Formel fand ich

$$\omega(s^2) = 0{,}2114$$

während die in der letzten Spalte angegebenen Werthe von s^2 ergaben

$$[xx] = 170{,}59$$
$$\omega = 1{,}636$$
$$\omega(s^2) = 0{,}299$$

Die Uebereinstimmung der Resultate, die sich bei der Berechnung von r und s darstellte, obwohl beide Factoren ganz unabhängig von einander sind, liefs vermuthen, dafs ein andrer Zahlen-Coefficient, als $\sqrt{2}$ in jene Formel eingeführt werden müsse. Um diesen zu finden setzte ich

$$\omega(r^2) = z \,.\, r \,.\, \omega(r)$$

und für $\omega(r^2)$ führte ich denjenigen Werth ein, der sich aus der Reihe der r^2 ergeben hatte. Ich fand aus den Beobachtungen von r

$$z = 2{,}000$$

und aus denjenigen von s

$$z = 1{,}998$$

Hiernach wäre also in diesem Falle

$$\omega(r^2) = 2 \,.\, r \,.\, \omega(r)$$

Die nothwendige Aenderung des Zahlen-Coefficienten, sobald statt zweier Beobachtungs-Reihen nur eine der Rechnung zum Grunde gelegt wird, erklärt sich sehr einfach dadurch, dafs in diesem Fall eine Ausgleichung der Fehler nicht mehr statt finden kann. Der wahrscheinliche Fehler des Productes rs

wurde hergeleitet aus der Verbindung der beiden Gröſsen $r \cdot \omega(s)$ und $s \cdot \omega(r)$. Durch Ausgleichung der Fehler in beiden, verminderte ihre Summe sich in demselben Verhältniſs, wie die Summe zweier entsprechenden Katheten zur Hypotenuse. Der Coefficient 2 blieb also unter dem Wurzelzeichen, sobald $r = s$ und $\omega(r) = \omega(s)$ gesetzt wurde. Wenn dagegen nur eine Messung vorliegt, so ist eine Ausgleichung der Fehler nicht mehr möglich und die Summe jener beiden Gröſsen stellt unmittelbar den gesuchten wahrscheinlichen Fehler dar, wobei das Wurzelzeichen vor dem Factor 2 fortfällt, der die Anzahl der gleichen Glieder bezeichnet.

Dieselbe Aenderung des Zahlen-Coefficienten tritt auch bei höheren Potenzen ein. Fragt man, wie groſs der wahrscheinliche Fehler der n-ten Potenz einer Gröſse sei, deren wahrscheinlichen Fehler man kennt, so ist dieser Fehler nicht aus n verschiedenen, sondern nur aus einer Reihe von Messungen hergeleitet und man hat daher

$$\omega(r^n) = n \cdot r^{n-1} \cdot \omega(r)$$

oder

$$\omega(r) = \frac{\omega(r^n)}{n \cdot r^{n-1}} \quad \ldots\ldots \quad D$$

Verwandelt sich aber die n-te Potenz in die ν-te Wurzel, oder n in $\frac{1}{\nu}$, so ist

$$\omega(r) = \nu \cdot r^{\frac{\nu-1}{\nu}} \cdot \omega(r^{\frac{1}{\nu}}) \quad \ldots\ldots \quad E$$

Für den sehr wichtigen und oft vorkommenden Fall, daſs ein Product sich in eine Potenz verwandelt, führt sonach jener Ausdruck C zu einem falschen Resultat. Dieses bestätigen die nachstehenden Proberechnungen.

Oft ist es Aufgabe, den wahrscheinlichen Fehler einer Constante zu finden, die nicht unmittelbar, sondern deren Quadrat nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet war, wobei sich unmittelbar nur der wahrscheinliche Fehler des Quadrats darstellen lieſs.

Die folgende Tabelle giebt die verschiedenen Werthe von r^2 an und zugleich die aus denselben berechneten Werthe von r.

	r^2	r
1	922,72	30,376
2	921,62	30,359
3	921,45	30,355
4	922,71	30,376
5	922,14	30,367
6	921,92	30,363
7	921,94	30,364
8	921,94	30,364
9	921,93	30,364
10	921,62	30,359
11	922,34	30,370
12	922,35	30,371
13	922,63	30,375
14	922,45	30,372
15	922,35	30,371
16	922,22	30,368
17	922,11	30,366
18	922,03	30,365
19	921,92	30,364
20	921,95	30,364
21	922,25	30,369
22	921,35	30,353
23	923,14	30,384
24	922,05	30,366
25	922,43	30,372
26	923,04	30,381
27	923,35	30,386
28	921,63	30,359
29	922,24	30,369
30	921,64	30,359
Mittel	922,18	30,368

Aus der zweiten Spalte ergiebt sich

$$r^2 = 922,18$$
$$[xx] = 6,787$$

$$\omega = 0{,}3263$$
$$\omega(r^2) = 0{,}0596$$

Nach der Formel D findet man

$$\omega(r) = 0{,}000981$$

Dieses stimmt mehr überein mit dem aus der r überschriebenen Spalte gezogenen Resultat, wonach

$$r = 30{,}368$$
$$[xx] = 0{,}001823$$
$$\omega = 0{,}00535$$
$$\omega(r) = 0{,}000976$$

Hätte man dagegen nach dem Ausdruck C den Coefficient $\sqrt{2}$ statt 2 beibehalten, so würde man

$$\omega(r) = 0{,}00139$$

gefunden haben. Ein Resultat, das von dem der directen Berechnung wesentlich abweicht, also unrichtig ist.

Um die Gültigkeit des Ausdrucks D auch für eine höhere Potenz zu prüfen, habe ich noch in gleicher Weise aus der vierten Potenz von r und dem wahrscheinlichen Fehler derselben den wahrscheinlichen Fehler von r berechnet.

	r^4	r
1	4,44	1,451
2	3,81	1,397
3	3,91	1,406
4	4,21	1,433
5	4,11	1,424
6	3,81	1,397
7	4,01	1,415
8	4,44	1,452
9	3,51	1,369
10	4,02	1,416
11	3,71	1,388
12	4,64	1,468
13	3,81	1,397
14	4,53	1,459

	r^4	r
15	3,82	1,398
16	3,71	1,388
17	4,11	1,424
18	3,71	1,388
19	3,81	1,397
20	4,01	1,415
21	3,51	1,369
22	4,33	1,442
23	3,82	1,398
24	3,71	1,388
25	4,55	1,460
26	4,12	1,425
27	3,92	1,407
28	4,23	1,434
29	3,81	1,397
30	3,41	1,359
Mittel	3,985	1,412

Aus den gemessenen verschiedenen Werthen von r^4 ergiebt sich als wahrscheinlichster Werth dieser Gröfse

$$r^4 = 3,985$$

ferner

$$[xx] = 3,0147$$
$$\omega = 0,2175$$

und

$$\omega(r^4) = 0,0397$$

Hieraus berechnet sich nach dem Satze D

$$\omega(r) = \frac{\omega(r^4)}{4 \cdot r^3}$$
$$\omega(r) = 0,003526$$

Aus den in der letzten Spalte enthaltenen Werthen von r, die aus denen für r^4 berechnet wurden, findet man aber

$$r = 1,4120$$
$$[xx] = 0,0235$$
$$\omega = 0,0192$$

und

$$\omega(r) = 0,003508$$

also sehr nahe mit jenem ersten Werth übereinstimmend. Hätte man dagegen eine Ausgleichung der Fehler vorausgesetzt und im Nenner den Factor $\sqrt{4} = 2$ angenommen, so würde der wahrscheinliche Fehler von r sich doppelt so grofs, als nach der directen Berechnung herausgestellt haben.

Ferner wurde der Satz E geprüft, indem ich den wahrscheinlichen Fehler von r, sowohl aus demjenigen der fünften Wurzel von r, als auch direct berechnete.

	$\sqrt[5]{r}$	r
1	2,061	37,33
2	2,123	43,10
3	2,133	44,16
4	2,091	39,95
5	2,092	40,04
6	2,092	40,04
7	2,072	38,19
8	2,101	40,93
9	2,154	46,34
10	2,092	40,04
11	2,165	47,58
12	2,101	40,93
13	2,091	39,95
14	2,101	40,93
15	2,111	41,93
16	2,081	39,03
17	2,131	43,95
18	2,122	43,00
19	2,062	37,29
20	2,154	46,34
21	2,103	41,11
22	2,091	39,95
23	2,091	40,04
24	2,155	46,45
25	2,092	40,04
26	2,144	45,29

	$\sqrt[5]{r}$	r
27	2,144	45,29
28	2,102	41,02
29	2,102	41,02
30	2,154	46,34
Mittel	2,110	41,92

Aus den Messungen der fünften Wurzel von r ergiebt sich

$$\sqrt[5]{r} = 2{,}1103$$
$$[xx] = 0{,}02460$$
$$\omega = 0{,}01965$$
$$\omega\left(\sqrt[5]{r}\right) = 0{,}003587$$

Hieraus findet man nach Satz E

$$\omega(r) = 0{,}35615.$$

Aus den in der letzten Spalte angegebenen Werthen von r, die unmittelbar aus denjenigen der Wurzeln berechnet sind, folgt aber

$$r = 41{,}920$$
$$[xx] = 244{,}88$$
$$\omega = 1{,}9600$$

und $$\omega(r) = 0{,}35785$$

also bis nahe $^1/_2$ Procent übereinstimmend mit dem ersten Resultat.

Schliefslich mag noch erwähnt werden, dafs auch bei ungleichen Factoren eines Productes in gewissen Fällen die Ausgleichung der Fehler nicht erfolgen kann und daher der Ausdruck für den wahrscheinlichen Fehler des Products in entsprechender Weise sich ändert. Dieses geschieht, sobald nur einer der Factoren wirklich gemessen oder berechnet ist, während die übrigen Factoren durch bestimmte Verhältnisse zu diesem gegeben sind.

Das Product sei beispielsweise aus den beiden Factoren r und s gebildet, von denen r, sowie auch der wahrscheinliche Fehler von r gegeben ist, während s ein gewisses Vielfaches von r, also gleich pr sein soll. Alsdann ist nach den Sätzen A und D

$$\begin{aligned} \omega(rs) &= \omega(pr^2) \\ &= \sqrt{p}\,.\,\omega(r^2) \\ &= 2\,.\sqrt{p}\,.\,r\,.\,\omega(r) \end{aligned}$$

Bei der Form des Ausdrucks, den die Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate fordert, kann man zuweilen eine gesuchte Unbekannte nicht als Factor, sondern mufs sie als Divisor einführen. Man findet alsdann zunächst den wahrscheinlichsten Werth von $\frac{1}{s}$, nebst dem wahrscheinlichen Fehler dieses Bruchs, woraus der wahrscheinliche Fehler von s zu berechnen bleibt.

Bei Herleitung des wahrscheinlichen Fehlers eines Productes rs wurde von der Auffassung ausgegangen, dafs, wenn keine weitere Ausgleichung der Fehler statt fände, der wahrscheinliche Fehler sein würde

$$\omega(rs) = r \cdot \omega(s) + s \cdot \omega(r)$$

Indem der zweite Factor s gleich $\frac{1}{r}$ gesetzt wird, ist s nur durch seine Beziehung zu r gegeben, wodurch augenscheinlich wieder jede weitere Ausgleichuüg der Fehler ausgeschlossen wird. Man hat also

$$\omega\left(\frac{r}{r}\right) = r \cdot \omega\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \cdot \omega(r)$$

Das Glied links vom Gleichheits-Zeichen wird Null, weil $\frac{r}{r}$ gleich Eins, also eine bestimmte Gröfse ist, für die kein Fehler und sonach auch kein wahrscheinlicher Fehler angenommen werden darf. Die wahrscheinlichen Fehler sind aber immer eben so wohl positiv, wie negativ, und in diesem Fall müssen $\omega(r)$ und $\omega\left(\frac{1}{r}\right)$ verschiedene Zeichen haben, da ihre Summe gleich Null sein soll. Dieses um so mehr, als r jedesmal wächst, sobald $\frac{1}{r}$ kleiner wird, und umgekehrt. Man hat also

$$r \cdot \omega\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} \cdot \omega(r)$$

und sonach

$$\omega(r) = r^2 \cdot \omega\left(\frac{1}{r}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich auch unmittelbar aus dem Satz D, wenn man den Exponent n gleich -1 setzt.

In nachstehender Tabelle sind wieder die Werthe von $\frac{1}{r}$ durch Würfeln bestimmt und hieraus diejenigen von r berechnet.

	$\frac{1}{r}$	r
1	0,3741	2,6731
2	0,3782	2,6441
3	0,3793	2,6364
4	0,3731	2,6802
5	0,3751	2,6659
6	0,3805	2,6281
7	0,3771	2,6518
8	0,3761	2,6589
9	0,3773	2,6504
10	0,3772	2,6511
11	0,3826	2,6137
12	0,3742	2,6724
13	0,3783	2,6434
14	0,3804	2,6288
15	0,3751	2,6659
16	0,3751	2,6659
17	0,3763	2,6575
18	0,3805	2,6281
19	0,3794	2,6357
20	0,3782	2,6441
21	0,3751	2,6659
22	0,3752	2,6652
23	0,3793	2,6364
24	0,3731	2,6802
25	0,3742	2,6724
26	0,3782	2,6441
27	0,3762	2,6582
28	0,3783	2,6434
29	0,3794	2,6357
30	0,3784	2,6427
Mittel	0,3772	2,6513

Für $\frac{1}{r}$ ist der wahrscheinlichste Werth 0,3772 und hieraus ergiebt sich

$$[xx] = 0{,}0001726$$
$$\omega = 0{,}001645$$

und
$$\omega\left(\frac{1}{r}\right) = 0{,}0003004$$

Nach vorstehender Formel F findet man alsdann

$$\omega(r) = 0{,}002112$$

Dagegen folgt aus den für r berechneten Werthen

$$r = 2{,}6513$$
$$[xx] = 0{,}008508$$
$$\omega = 0{,}01155$$

und
$$\omega(r) = 0\ 002109$$

also sehr nahe übereinstimmend mit dem nach der Formel F berechneten wahrscheinlichen Fehler.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, wie man aus dem wahrscheinlichen Fehler eines Logarithmus denjenigen der zugehörigen Zahl findet. Bei der bestimmten Form der Gleichungen, welche die Methode der kleinsten Quadrate fordert, läfst es sich zuweilen nicht vermeiden, statt der gesuchten Unbekannten deren Logarithmus einzuführen. Vielfach gelingt es nämlich nicht, mit Benutzung des Taylorschen Lehrsatzes oder in andrer Weise, einen Näherungs-Werth der Rechnung zum Grunde zu legen und die Verbesserung desselben zu suchen, weil die Coefficienten die weiter Annäherung unmöglich machen. Dazu kommt freilich noch der Uebelstand, dafs man nicht denjenigen Werth der Constante findet, welcher dem kleinsten Quadrat ihrer Fehler, vielmehr demjenigen der Fehler ihrer Logarithmen entspricht. Die dadurch veranlafste Unrichtigkeit läfst sich indessen aus den in den Tafeln enthaltenen Differenzen der Logarithmen ungefähr beurtheilen und stellt sich oft so geringe heraus, dafs dieses Verfahren unbedingt zulässig erscheint.

Es ist mir nicht gelungen, einen einfachen Ausdruck des wahrscheinlichen Fehlers einer Gröfse zu finden, für deren Logarithmus man den wahrscheinlichen Fehler kennt, doch kann man denselben in folgender Art leicht und meist mit genügender Schärfe darstellen.

Man suche die Zahlen zu folgenden Logarithmen:

1. zum Logarithmus des wahrscheinlichsten Werthes der Constante vermehrt um den wahrscheinlichen Fehler des Logarithmus derselben, also zu $\log r + \omega(\log r)$.
2. zu demselben Werth der Constante, also zu $\log r$, und
3. wieder zu diesem Logarithmus nach Abzug seines wahrscheinlichen Fehlers, also zu $\log r - \omega(\log r)$.

Stimmt die Differenz der ersten und zweiten dieser Zahlen mit derjenigen der zweiten und dritten überein, so ist diese Differenz der gesuchte wahrscheinliche Fehler $\omega(r)$. In diesem Fall ist auch das Resultat sicher. Sind dagegen beide Differenzen auffallend von einander verschieden, so ist der wahrscheinliche Fehler dem arithmetischen Mittel aus beiden gleich zu setzen.

Nach mehrfachen Proberechnungen, wobei ich den wahrscheinlichen Fehler von r unmittelbar aus den Werthen von r herleitete, die sich aus den einzelnen Logarithmen ergaben, führte dieses Verfahren jedesmal zu befriedigender Uebereinstimmung. Diese war im Allgemeinen um so vollständiger, je gleichmäfsiger die in den Logarithmen-Tafeln angegebenen Differenzen blieben. In nachstehender Tabelle sind absichtlich sehr kleine Logarithmen mit sehr grofsen Differenzen gewählt und dennoch stimmt das nach dieser Regel daraus gezogene Resultat sehr nahe mit dem der Proberechnung überein.

	$\log r$	r
1	0,0181	1,0426
2	0,0361	1,0867
3	0,0301	1,0715
4	0,0391	1,0942
5	0,0453	1,1099
6	0,0271	1,0644
7	0,0394	1,0950
8	0,0428	1,1023

	$\log r$	r
9	0,0363	1,0872
10	0,0332	1,0794
11	0,0271	1,0644
12	0,0332	1,0794
13	0,0181	1,0426
14	0,0241	1,0571
15	0,0422	1,1020
16	0,0242	1,0573
17	0,0392	1,0945
18	0,0212	1,0500
19	0,0303	1,0723
20	0,0331	1,0792
21	0,0271	1,0644
22	0,0363	1,0872
23	0,0454	1,1102
24	0,0362	1,0869
Mittel	0,0327	1,0784

Die $\log r$ überschriebene Spalte enthält hinter den beiden davorstehenden Nullen nur die Ziffern, die aus dem Ablesen der Augen auf den nach oben gekehrten Seiten der Würfel sich ergaben, während die folgende Spalte die Zahlen bezeichnet, deren Logarithmen die erstern sind. Aus den verschiedenen Messungen des Logarithmus ergiebt sich als wahrscheinlichster Werth desselben

$$\log r = 0{,}03267$$

Vergleicht man diesen mit den einzelnen Beobachtungen und erhebt die Differenzen zur zweiten Potenz, so beträgt die Summe der Fehlerquadrate

$$[xx] = 0{,}001493$$

und hieraus findet man den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler

$$\omega = 0{,}005434$$

und den wahrscheinlichen Fehler jenes Werthes von $\log r$

$$\omega(\log r) = 0{,}00111$$

Verbindet man den letzten Ausdruck mit demjenigen für $\log r$ und schlägt die zu diesen Logarithmen gehörigen Zahlen auf, so findet man

$$\begin{aligned} &\text{zu } \log r + \omega(\log r) \text{ die Zahl } 1{,}0809 \\ &\text{zu } \log r \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; 1{,}0782 \\ \text{und}\quad &\text{zu } \log r - \omega(\log r) \;.\;.\;. \; 1{,}0754 \end{aligned}$$

Die Differenz zwischen den beiden ersten ist 0,0027 und zwischen der zweiten und dritten 0,0028, also der wahrscheinliche Fehler von r

$$\omega(r) = 0{,}00275$$

Aus den in der letzten Spalte angegebenen Werthen von r findet man dagegen

$$\begin{aligned} r &= 1{,}0784 \\ [xx] &= 0{,}009157 \\ \omega &= 0{,}01345 \\ \text{und}\quad \omega(r) &= 0{,}002747 \end{aligned}$$

also übereinstimmend mit der ersten Rechnung.

Oscar Bonde in Altenburg.

